Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 05.09.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Diferencijalna geometrija**

1. Neka je data kriva
$$x = a\, cht\, cost, \quad y = a\, cht\, sint, \quad z = at,$$
i neka je A presječna tačka normalne ravni na krivu sa $0z$-osom. Izračunati udaljenost d između (proizvoljne) tačke na krivoj u kojoj smo odredili normalnu ravan i tačke A.

2. Neka je $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ prirodini triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka $(\vec{r} = \vec{r}(s))$, gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori. Definišimo polje δ sa $\delta \stackrel{def}{=} \tau\vec{t} + K\vec{b}$, gdje su K i $-\tau$ krivina i torzija krive $\vec{r}$. Izračunati
$$\frac{d\vec{t}}{ds} - \delta \times \vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} - \delta \times \vec{n} \quad \text{i} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} - \delta \times \vec{b}.$$
Šta možemo zaključiti na osnovu dobijenog rezultata?

3. Zadana je ploha
$$\vec{r}(u, v) = u\vec{a} + sinu\vec{b} + v\vec{c}, \quad u, v \in \mathbb{R}$$
gdje su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dati vektori.
a) Ispitati šta su koordinatne krive.
b) Odrediti koeficijente E, F i G prve kvadratne forme.
c) Kada će se koordinatne krive ove plohe sijeći ortogonalno?
d) Naći element površine dS dane plohe.

4. Odrediti linije krivine površi $\vec{r} = (u, v, u^2 + v^2)$.

(#) Neka je data kriva $x = a\,\mathrm{ch}t\cos t$, $y = a\,\mathrm{ch}t\sin t$, $z = at$, i neka je A presječna tačka normalne ravni na krivu sa Oz-osom. Izračunati udaljenost d između (proizvoljne) tačke na krivoj u kojoj smo odredili normalnu ravan i tačke A.

Rj. Jednačina normalne ravni u tački (x_0, y_0, z_0) je

$$\dot{x}(x - x_0) + \dot{y}(y - y_0) + \dot{z}(z - z_0) = 0 \quad \dots (1)$$

Presječna tačka A normalne ravni i ose Oz mora biti oblika $A(0, 0, z_1)$, gdje je z_1 tražena vrijednost. Ako tačku $A(0,0,z_1)$ uvrstimo u jednačinu normalne ravni (1) imamo:

$$\dot{x}(0 - x_0) + \dot{y}(0 - y_0) + \dot{z}(z_1 - z_0) = 0$$

$$\dot{z} z_1 - \dot{z} z_0 = \dot{x} x_0 + \dot{y} y_0$$

$$z_1 = \frac{\dot{x} x_0 + \dot{y} y_0 + \dot{z} z_0}{\dot{z}}$$

Za proizvoljnu tačku (x_0, y_0, z_0) ćemo uzeti $(a\,\mathrm{ch}t\cos t, a\,\mathrm{ch}t\sin t, at)$. Tada

$$\dot{x} = a\,\mathrm{sh}t\cos t - a\,\mathrm{ch}t\sin t$$
$$\dot{y} = a\,\mathrm{sh}t\sin t + a\,\mathrm{ch}t\cos t$$
$$\dot{z} = a$$

$$\boxed{\mathrm{sh}^2 t + 1 = \mathrm{ch}^2 t}$$

$$\dot{x} x_0 + \dot{y} y_0 + \dot{z} z_0 = a^2\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t\cos^2 t \underline{- a^2\mathrm{ch}^2 t\sin t\cos t}$$
$$+ a^2\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t\sin^2 t \underline{+ a^2\mathrm{ch}^2 t\sin t\cos t} + a^2 t =$$
$$= a^2\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t + a^2 t$$

$$z_1 = a\,\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t + at$$

Koordinate tačke A su $A(0, 0, a\,\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t + at)$.
Neka je $B(a\,\mathrm{ch}t\cos t, a\,\mathrm{ch}t\sin t, at)$ proizvoljna tačka na krivoj

$$d = |AB| = \sqrt{a^2\mathrm{ch}^2 t\cos^2 t + a^2\mathrm{ch}^2 t\sin^2 t + a^2\mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{ch}^2 t} = \sqrt{a^2\mathrm{ch}^2 t + a^2\mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{ch}^2 t}$$

$$= a\,\mathrm{ch}t\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 t} = a\,\mathrm{ch}^2 t$$

tražena udaljenost

(7) Neka je $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ prirodni triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka $(\vec{r}=\vec{r}(s))$, gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori. Definišimo polje δ sa $\delta \overset{def}{=} \tau \vec{t} + \kappa \vec{b}$ gdje su κ i $-\tau$ krivina i torzija krive $\vec{r}$. Izračunati

$$\frac{d\vec{t}}{ds} - \delta \times \vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} - \delta \times \vec{n} \quad i \quad \frac{d\vec{b}}{ds} - \delta \times \vec{b}.$$

Šta možemo zaključiti na osnovu dobijenog rezultata.

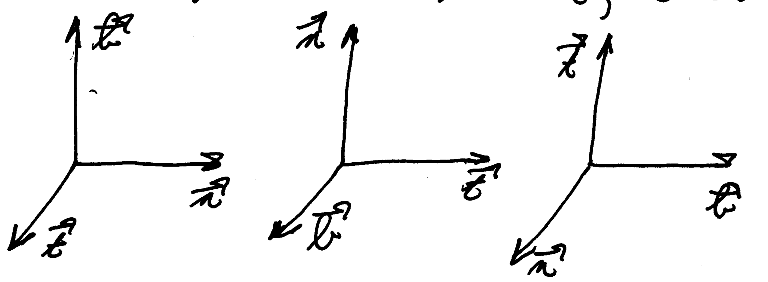
Rj.

Frenetovi obrasci za krivu $\vec{r}=\vec{r}(s)$ su

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n} \quad \text{gdje su} \qquad \dots (1)$$

$\vec{t}$, $\vec{b}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori.

Prvo izračunajmo $\delta \times \vec{t}$, $\delta \times \vec{n}$, $\delta \times \vec{b}$.



$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$

$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$

$\vec{t} = \vec{n} \times \vec{b}$

$$\left.\begin{aligned}
\delta \times \vec{t} &= (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) \times \vec{t} = \tau(\vec{t} \times \vec{t}) + \kappa(\vec{b} \times \vec{t}) = \kappa \vec{n} \\
\delta \times \vec{n} &= (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) \times \vec{n} = \tau(\vec{t} \times \vec{n}) + \kappa(\vec{b} \times \vec{n}) = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t} \\
\delta \times \vec{b} &= (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) \times \vec{b} = \tau(\vec{t} \times \vec{b}) + \kappa(\vec{b} \times \vec{b}) = -\tau \vec{n}
\end{aligned}\right\} \dots (2)$$

Sada iz (1) i (2) možemo zaključiti da je

$$\frac{d\vec{t}}{ds} - \delta \times \vec{t} = 0, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} - \delta \times \vec{n} = 0 \quad i \quad \frac{d\vec{b}}{ds} - \delta \times \vec{b} = 0.$$

Na osnovu dobijenog rezultata možemo zaključiti da su Frenetove jednačine za $\frac{d\vec{t}}{ds}$, $\frac{d\vec{n}}{ds}$ i $\frac{d\vec{b}}{ds}$ ekvivalentne jednačinama $\delta \times \vec{t}$, $\delta \times \vec{n}$ i $\delta \times \vec{b}$.

(#) Zadana je ploha

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{a} + \sin u\,\vec{b} + v\vec{c}, \quad u,v \in R$$

gdje su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zadani vektori.

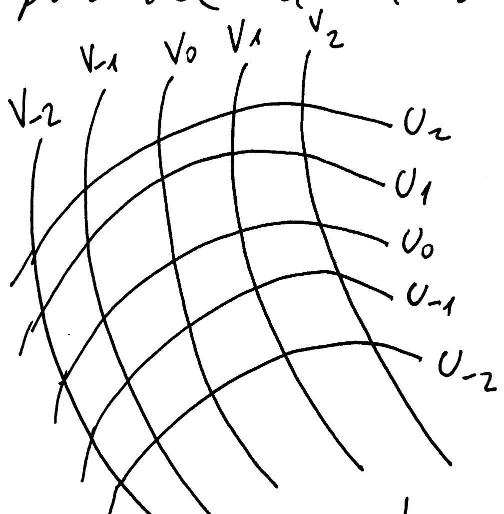
a) Ispitati što su koordinatne krivulje.

b) Odrediti koeficijente E, F i G prve kvadratne forme

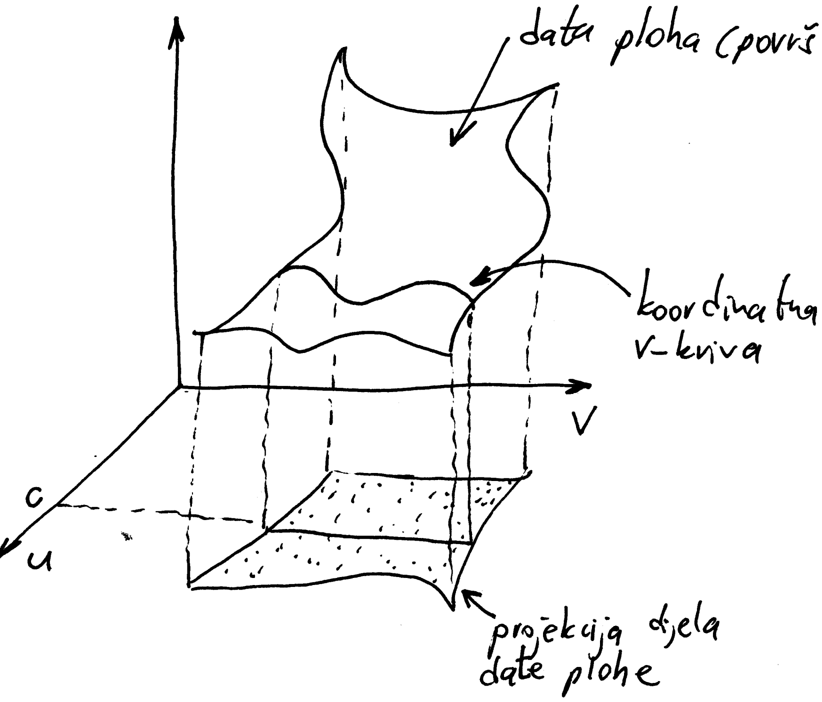
c) Kada će se koordinatne krive ove plohe sjeći ortogonalno?

d) Naći element površine dS dane plohe.

Rj. Znamo da su koordinate brojevi uzeti u određenom redu i koji određuju položaj tačke na liniji, u ravni, na površi ili u prostoru. Zavisno od cilja i karaktera ispitivanja ovog ili onog objekta biraju se različiti koordinatni sistemi, pomoću kojih se svakoj tački prostora koordinira određen skup brojeva – koordinatne tačke. Na primjer, u nekoj oblasti ravni ili u cijeloj ravni se razmatraju dvije porodice linija $U(M) = const.$ i $V(M) = const.$, takve da se linije iste porodice ne sijeku među sobom, a svaka linija jedne porodice se siječe sa svakom linijom druge porodice u samo jednoj tački M. Brojevi $U(M)$ i $V(M)$ su onda koordinate tačke M u ravni.



Ako su linije $U = const.$ i $V = const.$ prave, sistem koordinata se naziva pravolinijski koordinatni sistem. Ako je jedna od linija porodica $U = const$ ili $V = const$, ili ako su obe linije krive linije, koordinatni sistem se naziva krivolinijski ili Gausov koordinatni sistem.



U našem slučaju postoje dvije koordinatne krive

a) v-kriva (v-krivulja)

b) u-kriva

Koordinatne v-krive dobijemo kada za u stavimo neku konstantu

$u=u_0=const.$

$$\vec{r} = \underbrace{u_0\vec{a} + \vec{b}\sin u_0}_{=\vec{r}_0} + v\vec{c}$$

koordinatna v-kriva

Koordinatne u-krive dobijemo kada za v stavimo neku konst.

prava paralelna sa $\vec{c}$

$v=v_0=const$

$$\vec{r} = u\vec{a} + \sin u\,\vec{b} + v_0\vec{c}$$

kosa sinusoida u ravni || ravni određ. sa vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$

koordinatne u-krive

b) Gausove fundamentalne veličine prvog reda

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (\vec{a} + \vec{b}\cos u)^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}\cos u$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{c}, \quad G = \vec{c}^{\,2}$$

c) $F=0$ je uslov okomitosti koordinatnih u i v krivih tj.

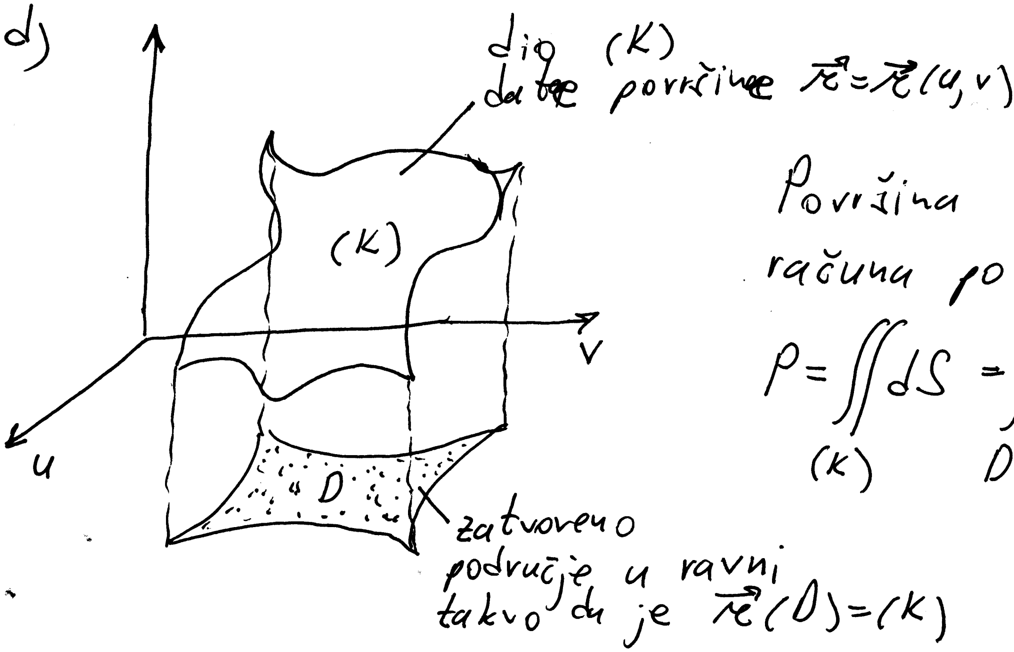
$\vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}\cos u = 0$ i ovo treba da vrijedi za $\forall u$,

Odavde možemo vidjeti da će ova jednakost biti zadovoljena (i da slijedi da je) za $\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ i $\vec{c}\cdot\vec{b} = 0$ tj. kada je

$\vec{c} \perp \vec{a}$ i $\vec{c} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{c} = k(\vec{a}\times\vec{b})$

Za $\vec{c} = k(\vec{a}\times\vec{b})$ koordinatne krive će se sječi ortogonalno.

d)



Površina područja (K) se računa po formuli

$$P=\iint_{(K)} dS = \iint_D |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, du\, dv$$

$$= \iint_D \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

U ovom slučaju mi tražimo element površine dS.

$$dS = |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, du\, dv$$

$$\vec{r}\,'_u = \vec{a} + \vec{b}\cos u$$

$$\vec{r}\,'_v = \vec{c}$$

$$dS = |(\vec{a}+\vec{b}\cos u)\times\vec{c}|\, du\, dv = |(\vec{a}\times\vec{c}) + (\vec{b}\times\vec{c})\cos u|\, du\, dv$$

Ako su koordinatne krive međusobno ortogonalne, tada je $F=0$, pa je

$$dS = \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv = \sqrt{EG}\, du\, dv$$

$$= k\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}\cos u)^2 (\vec{a}\times\vec{b})^2}\, du\, dv$$

Odrediti linije krivine površi $\vec{r}=(u, v, u^2+v^2)$.

Rj.

Diferencijalna jednačina linije krivine je

$$d\vec{r}\cdot(\vec{n}\times d\vec{n})=0$$

$\vec{r}_u' = (1, 0, 2u)$

$\vec{r}_v' = (0, 1, 2v)$

$$\vec{n}=\vec{r}_u'\times\vec{r}_v' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

$d\vec{r} = \vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv$

$d\vec{r} = (du, dv, 2u\,du + 2v\,dv)$

$d\vec{n} = (-2du, -2dv, 0)$

Iz $d\vec{r}\cdot(\vec{n}\times d\vec{n})=0$ imamo

$$\begin{vmatrix} du & dv & 2u\,du+2v\,dv \\ -2u & -2v & 1 \\ -2du & -2dv & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{III_v + I_v\cdot 2}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} du & dv & 2u\,du+2v\,dv \\ -2u & -2v & 1 \\ 0 & 0 & 4u\,du+4v\,dv \end{vmatrix} = 0$$

$$(4u\,du + 4v\,dv)\begin{vmatrix} du & dv \\ -2u & -2v \end{vmatrix} = 0 \quad /:8$$

$$(u\,du + v\,dv)(-v\,du + u\,dv) = 0$$

$$-uv\,du^2 + (u^2-v^2)\,du\,dv + uv\,dv^2 = 0 \quad /: dv^2$$

$$-uv\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (u^2-v^2)\frac{du}{dv} + uv = 0$$

$$\frac{du}{dv} = t \Rightarrow -uv\,t^2 + (u^2-v^2)t + uv = 0$$

$$D = (u^2-v^2)^2 + 4u^2v^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2$$
$$= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2+v^2)^2$$

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_{1,2} = \frac{-(u^2-v^2) \pm (u^2+v^2)}{-2uv}$$

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_1 = \frac{-u^2+v^2-u^2-v^2}{-2uv} = \frac{-2u^2}{-2uv} = \frac{u}{v} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{u}{v}$$
$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v}$$
$$\ln u = \ln v + \ln C$$
$$u = Cv$$

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_2 = \frac{-u^2+v^2+u^2+v^2}{-2uv} = \frac{2v^2}{-2uv} = -\frac{v}{u} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dv} = -\frac{v}{u}$$
$$u\,du = -v\,dv$$
$$u^2+v^2 = C$$

Tražene linije krivine su

$$\vec{r}_1 = (Cv,\ v,\ C^2v^2+v^2)$$
$$\vec{r}_2 = (u,\ \pm\sqrt{c-u^2},\ C)$$